Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten

Günther Malle, Universität Wien

1. Einleitung

Die folgenden Ausführungen verstehe ich als einen Beitrag zur Diskussion um die *Kernstoffe* des Mathematikunterrichts der AHS-Oberstufe. In letzter Zeit ist diese Diskussion wieder stärker aufgeflammt, wofür man unter anderem die folgenden Gründe angeben kann:

a) Orientierungshilfen im Mathematikunterricht: Lehrerinnen und Lehrer stöhnen unter der Stofffülle des Lehrplans. Objektiv betrachtet ist diese Stofffülle nicht immer in dem Ausmaß gegeben, wie geglaubt wird. Viele Schwierigkeiten kommen dadurch zustande, dass im Mathematikunterricht viel Überflüssiges (nicht den Lehrplanintentionen Entsprechendes) gemacht wird. Zum Teil handelt es sich sogar um traditionell Liebgewonnenes, das schon seit längerer Zeit nicht mehr im Lehrplan steht (wie etwa die Berührbedingungen in der Kegelschnittslehre). Wenn man sich auf das *Wesentliche* konzentriert, erscheint der Stoffdruck zumindest in einem milderen Licht. Aber was ist *wesentlich*? Zu dieser Frage erwarten sich viele Lehrerinnen und Lehrer Orientierungshilfen. Die Lehrbücher lassen einen dazu weitgehend im Stich (es ist wahrscheinlich auch gar nicht möglich, solche Gewichtungsfragen in einem Lehrbuch adäquat zu übermitteln). Es ist heute auch nicht mehr möglich, dass gewisse „Experten" autoritär festlegen, was als wesentlich zu gelten hat. Derartige Festlegungen können nur mehr im Rahmen einer breiten (möglichst internationalen) Diskussion erfolgen, an dem sich alle Betroffenen beteiligen können. Der Versuch, *Kernstoffe* (besser: *Kernwissen*) festzulegen, ist als Teil einer solchen Diskussion anzusehen.

b) *Empirische Studien*: Verschiedene empirische Untersuchungen, vor allem die TIMS-Studie, haben in geradezu erschreckender Weise gezeigt, dass bei unseren Maturanten (wie auch jenen anderer Länder) ein gewisses *Grundwissen (Grundverständnis)* in Bezug auf einfache Sachverhalte nicht vorhanden ist, obwohl man bisher dieses Vorhandensein als selbstverständlich erachtete. Das Paradebeispiel dafür ist das Prozentrechnen. Angeblich können es alle unsere Maturanten, laut TIMS-Studie aber nur ca. 60-80 % (je nach Aufgabenstellung). Ähnliche Ergebnisse wurden auch für Oberstufeninhalte erhalten, z.B. Grundlagen der Vektorrechnung. Die TIMS-Studie war keineswegs die einzige Studie, die das gezeigt hat. Es hat Studien zu praktisch allen Stoffgebieten der Schulmathematik gegeben. Allein neun davon wurden am Institut für Mathematik der Universität Wien durchgeführt. Exemplarisch seien hier nur die Untersuchungen von S.KLAUSBERGER (1993) und J.UNGER (1999) genannt. Die erste dieser Untersuchungen hat insbesondere gezeigt, dass in Bezug auf den Differenzen- und Differentialquotienten große Defizite bestehen, die zweite Untersuchung hat Analoges für das bestimmte Integral gezeigt.

Diese und ähnliche Untersuchungen haben keine große Öffentlichkeitswirkung entfaltet, weil sie erstens stets auf ein enges Stoffgebiet eingeschränkt waren und zweitens nur in nationalem Rahmen durchgeführt wurden. Die TIMS-Studie hat meines Erachtens hauptsächlich deshalb eine breitere Öffentlichkeit erreicht, weil ein internationales Ranking erstellt wurde, bei dem die österreichische Oberstufe nicht besonders gut abgeschnitten hat (was den Medien immerhin einige Beiträge abgerungen und die Politiker zu Reaktionen herausgefordert hat). Dieses Ranking gehört allerdings zum eher problematischen Teil der Untersuchung und wurde von den Autoren der Studie selbst stark relativiert. Es ist schon deshalb nicht besonders aussagekräftig, weil (mit wenigen Ausnahmen) alle teilnehmenden Staaten nicht übermäßig gut abgeschnitten haben und es in einem solchen Fall relativ unerheblich ist, ob man im ersten oder letzten Drittel liegt.

Das wesentliche Ergebnis der TIMS-Studie und ähnlicher Studien liegt für mich in etwas Anderem, nämlich sehr deutlich gemacht zu haben, dass unseren Maturanten (wie jenen anderer Länder) *grundlegende Kenntnisse* abgehen, die man als *Kernwissen* ansehen kann. Die Tendenz ist dabei bei allen Inhalten dieselbe: Obwohl im Unterricht recht komplizierte Techniken und relativ komplexe Aufgabenstellungen behandelt werden, bleibt das Verständnis des Einfachen und Grundsätzlichen auf der Strecke. (Zur Illustration: Von den 250 Schülern, die J.UNGER untersucht hatte, konnten praktisch alle Volumina von Drehkörpern ausrechnen, aber kein einziger [!] konnte sagen, was ein bestimmtes Integral ist.)

c) *Allgemeinbildung*: In diesem Artikel geht es um die „Allgemeinbildende Höhere Schule". Was aber ist am Mathematikunterricht dieser Schule *allgemeinbildend*? Die Frage ist alt, sie wird aber spätestens seit dem Erscheinen des Buches „Allgemeinbildung und Mathematik" von H.W. HEYMANN mit größerer Vehemenz diskutiert. Die erstaunliche Öffentlichkeitswirksamkeit dieses Buches wurde ebenfalls mit Hilfe der (deutschen) Medien erreicht, die den Slogan „Sieben Jahre Mathe sind genug" in die Welt gesetzt haben (was HEYMANN so nie vertreten hat). Wir erleben heute, dass der Mathematikunterricht - besonders der der Oberstufe - in einer noch nie dagewesenen Weise hinterfragt wird. Angeblich lernt man in ihm nichts Vernünftiges für das Leben nach der Matura. Es ist zwar unumstritten, dass die meisten Inhalte der Oberstufenmathematik für jene nützlich sind, die ein naturwissenschaftlich-technisches Studium (oder ein anderes Studium mit Mathematikanteil) anstreben, aber dies ist nur ein sehr kleiner Prozentsatz unserer Maturanten. Die Frage ist, ob man auch alle jene mit der Oberstufenmathematik „traktieren" muß, die diese voraussichtlich nie mehr in ihrem Leben brauchen werden. Können auch diese Schüler etwas vom Mathematikunterricht profitieren? Wenn ja, dann muss der Mathematikunterricht etwas zur Allgemeinbildung beitragen.

Als Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung wird meist die Vermittlung allgemeiner *formaler Qualifikationen* angesehen, die für jedermann nützlich sein können, z.B. Fähigkeiten im Darstellen, Interpretieren, kritischen Denken, produktiven Denken, exakten Arbeiten, Problemlösen usw. Wir sind von dieser Leistung des Mathematikunterrichts wenigstens im Prinzip überzeugt, auch wenn ein wissenschaftlicher Nachweis nie wirklich gelungen ist und es im Detail sehr viele Probleme gibt (z.B. mit dem Transfer in außermathematische Lebensbereiche). Aus dem Anstreben gewisser formaler Qualifikationen läßt sich aber nicht schlüssig ableiten, welche *Inhalte* in der Schulmathematik behandelt werden sollen. Zwar kann man sagen, dass bestimmte Inhalte für bestimmte formale Qualifikationen geeigneter sind als andere, dies reicht aber zu einer Festlegung der Inhalte nicht aus. Die Frage ist also: Gehört zur *höheren Allgemeinbildung (Oberstufenbildung)* neben dem Besitz gewisser formaler Qualifikationen auch die Kenntnis gewisser Inhalte? Einige Inhalte wird man leicht ausschließen können. Z.B. wird niemand ernsthaft behaupten, daß ein Mensch, der nicht partiell integrieren kann, nicht allgemeingebildet sein kann. Aber gibt es Inhalte, die keinesfalls ausgeschlossen werden sollen (oder können)? Wir sind also wieder bei der Frage nach den *Kernstoffen*, die jetzt als Stoffe angesehen werden, die einen unverzichtbaren Beitrag zur Allgemeinbildung leisten.

Bei der Auswahl der Inhalte hat sich die Schule bislang stark von den (vermeintlichen) Bedürfnissen der Hochschule leiten lassen. Selbstverständlich wird man diese Bedürfnisse nach Möglichkeit berücksichtigen, doch Allgemeinbildung hat Vorrang. (Das Argument „Die Schüler müssen partiell integrieren lernen, weil der Professor XY das in seinen Übungen voraussetzt" ist unzulässig.) Ich persönlich glaube allerdings nicht daran, dass sich irgendwelche mathematischen Inhalte der Oberstufe „objektiv" als unverzichtbar für eine

Allgemeinbildung ausweisen lassen. Die Auswahl der Inhalte kann somit nur einem möglichst breit und permanent geführten Diskussionsprozess entspringen, in dem die besseren Argumente zählen.

Mit der Auswahl der Inhalte ist es aber leider noch nicht getan. Wichtiger noch ist die Frage, welche *Aspekte dieser Inhalte* so massive Beiträge zur Allgemeinbildung leisten, dass sie als unverzichtbare Bestandteile eines Kernwissens angesehen werden können. In dieser Diskussion hat sich nun der Terminus „Grundvorstellungen“ sehr bewährt. Der Terminus ist nicht neu (er stammt aus der deutschen Rechendidaktik, siehe VOM HOFE 1995), man hat jedoch erst vor wenigen Jahren begonnen, detaillierter über Grundvorstellungen zu den Inhalten der Schulmathematik nachzudenken. Auf die derzeit geführte (eher akademische) Diskussion, wie dieser Terminus am besten aufzufassen sei, gehe ich nicht weiter ein. Es genügt, wenn man im Folgenden Grundvorstellungen als besonders wichtige (weil allgemeinbildende) Vorstellungen ansieht, die mit einem bestimmten Inhalt, insbesondere einem bestimmten Begriff verbunden werden sollen. Die Betonung liegt auf *Vorstellungen*: die Schüler sollen Inhalte nicht nur auf einer unverstandenen verbalen oder symbolischen Ebene nachplappern können, sondern sie sollen sich darunter etwas *vorstellen* können. (Vorstellen ist dabei in einem sehr weiten Sinn gemeint, es umfasst nicht nur bildliche Vorstellungen, sondern auch Tätigkeiten, Anwendungsmöglichkeiten und andere Arten des Wissens.) Die Frage, um die es geht, lässt sich also so formulieren: Welche Grundvorstellungen soll eine Maturantin oder ein Maturant mit den Inhalten der Schulmathematik unter allen Umständen verbinden?

In der letzten Zeit habe ich zu beinahe allen Inhalten der Unter- und Oberstufe *Listen von Grundvorstellungen* entwickelt, die als Vorlagen für weitere Diskussionen dienen können. Exemplarisch stelle ich im Folgenden die Listen für die Begriffe des Differenzen- und Differentialquotienten vor, wobei neben den *Grundvorstellungen* auch einige *Grundfähigkeiten* angeführt werden. Die Wichtigkeit dieser Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten ergibt sich meines Erachtens in erster Linie daraus, dass mit ihrer Hilfe gewisse Begriffe, die sich als (mittlere) Änderungsraten auffassen lassen, besser verstanden werden. Solche Begriffe finden sich im täglichen Leben (z.B. Geschwindigkeit), vor allem aber in den Naturwissenschaften (z.B. Volumsabnahmegeschwindigkeit, Änderungsrate des Luftdrucks bezüglich der Höhe, Temperaturgradient, Stromstärke, Empfindlichkeit eines Voltmeters).

Zu jeder Grundvorstellung habe ich exemplarisch eine einfache *Kontrollfrage* hinzugefügt, mit der man überprüfen kann, ob die betreffende Grundvorstellung bei einer Schülerin oder einem Schüler vorhanden ist. Darüber hinaus habe ich sowohl beim Differenzen- als auch beim Differentialquotienten eine Liste von Musteraufgaben angehängt, wobei bei jeder Aufgabe am Anfang angegeben ist, welche Grundvorstellung bzw. welche Grundfähigkeit durch sie angesprochen wird. Solche Analysen sind meines Erachtens bei der Auswahl von Aufgaben von großer Wichtigkeit (auch für Lehrbuchautoren). Dabei ist darauf zu achten, dass zu jeder Grundvorstellung (sofern man sie als unverzichtbar ansieht) genügend viele Aufgaben gestellt werden. Andernfalls kann man kaum erwarten, dass Schülerinnen und Schüler diese Grundvorstellungen ausbilden (angeboren sind sie ja leider nicht).

Die erwähnten Kontrollaufgaben und vielleicht auch einige der Musteraufgaben werden so manchem möglicherweise als zu trivial erscheinen, um sie zu einer Prüfung, zu einer Schularbeit oder gar zur Matura zu stellen. Doch wäre gerade dies vonnöten. Denn die vordringliche Aufgabe des Mathematikunterrichts der Oberstufe ist es, das Vorhandensein dieser Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten bei unseren Maturanten zu sichern und dies erfordert permanente Wiederholung und permanente Kontrolle. Eine praktikable Möglichkeit, einfache Kontrollfragen unterzubringen, besteht darin, eine Aufgabe in a), b), c), ... zu unterteilen, wobei a) eine einfache Kontrollfrage enthält und die restlichen Teile der Aufgabe andere

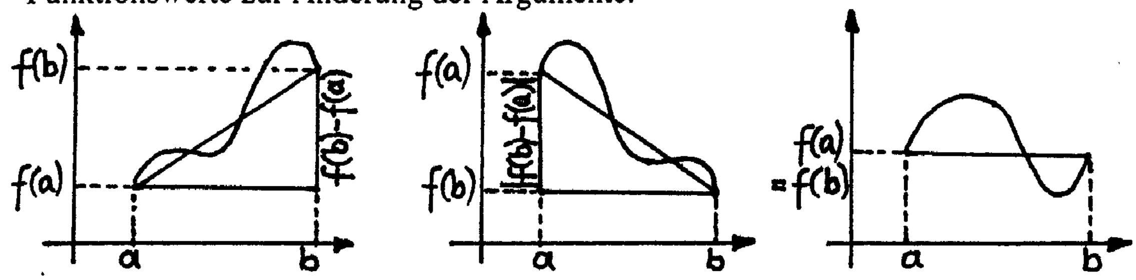
Anforderungen (z.B. in rechentechnischer Hinsicht) stellen. Wir brauchen jedenfalls in unserem Prüfungssystem den *Mut zum Einfachen.* Es nützt beispielsweise nichts, wenn bei der Matura eine „eintrainierte Show" abgezogen wird, dabei aber das Verständnis grundlegendster Dinge nicht vorhanden ist. Man erinnere sich in diesem Zusammenhang daran, dass die TIMS-Studie und andere Studien gezeigt haben, daß vor lauter Üben des Komplizierten das Einfache auf der Strecke bleibt. Solange wir dem nicht ernsthaft entgegentreten, ist zu befürchten, dass zukünftige Studien (die mit Sicherheit in regelmäßigen Abständen kommen werden) ähnlich schlechte Ergebnisse erbringen werden wie die TIMS-Studie.

2. Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten (zur mittleren Änderungsrate)

Grundvorstellung 1 (Differenzenquotient als Verhältnis): Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) von f in [a,b] bzw. [b,a] ist

$$\frac{f(b) - fa)}{b - a}.$$

In Worten : Der Differenzenquotient ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.



Kontrollfrage : Gegeben sei eine reelle Funktion f. Schreib die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [1;3] sowie im Intervall [u,v] an! Wie lauten diese mittleren Änderungsraten, falls $f(x) = x^2$?

Grundvorstellung 2 (Differenzenquotient als mittlere Änderung pro Einheit): Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit.

Kontrollfrage : Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ im Intervall [0;4] !

a) Um wie viel wächst f(x), wenn x von 0 auf 1 erhöht wird? Um wie viel wächst f(x), wenn x von 3 auf 4 erhöht wird?

b) Um wie viel wächst f(x) im Mittel im Intervall [0;4], wenn x um 1 erhöht wird?

Grundvorstellung 3 (Differenzenquotient als Faktor):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) = m \cdot (b - a)$$

In Worten: Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muß, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten. Oder: Multipliziert man die Änderung der Argumente mit dem Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate), erhält man die Änderung der Funktionswerte.

Kontrollfrage : Gegeben sei eine monoton wachsende reelle Funktion f. Wenn x von u auf v erhöht wird, wieviel mal stärker wächst dabei f(x) als x ? Falls $f(x) = x^2$ und x von 1 auf 3 erhöht wird, wieviel mal stärker wächst dann f(x) als x ?

Grundvorstellung 4 (Vorzeichen des Differenzenquotienten): Ist der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) von f in [a,b]

- positiv, so steigt f insgesamt in [a,b] (f muß aber nicht monoton steigend in [a,b] sein),
- negativ, so fällt f insgesamt in [a,b] (f muß aber nicht monoton fallend in [a,b] sein),
- gleich 0, so ist f insgesamt in [a,b] weder steigend noch fallend (f muß aber nicht konstant in [a,b] sein).

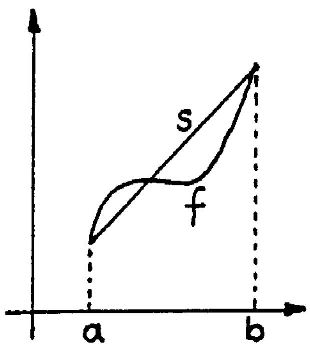
Kontrollfrage : Skizziere den Graphen einer nichtlinearen Funktion f im Intervall [a,b] , deren Differenzenquotient in diesem Intervall a) positiv, b) negativ, c) gleich 0 ist!

Grundvorstellung 5: Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist in jedem Intervall gleich der Steigung der linearen Funktion. [Die Schüler sollen dies auch begründen können.]

Kontrollfrage : Gegeben sei eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$. Wie groß ist der Differenzenquotient dieser Funktion im Intervall [a,b] ? Beweise deine Antwort!

Grundvorstellung 6: Der Differenzenquotient von f in [a,b] ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion s. (Die Funktion f muß aber nicht in der Nähe der Sekantenfunktion verlaufen.)

Kontrollfrage : Wie hängt der Differenzenquotient einer Funktion f in einem Intervall [a,b] mit der linearen Funktion durch die Punkte (a,f(a)) und (b,f(b)) zusammen? Skizze!



3. Grundfähigkeiten zum Differenzenquotienten (zur mittleren Änderungsrate)

Grundfähigkeit 1 : Die Schüler sollen den Differenzenquotienten einer vorgegebenen Funktion in einem vorgegebenen Intervall angeben können (auch aus Graphen herauslesen können). Umgekehrt sollen sie Funktionen mit vorgegebenen Differenzenquotienten angeben können.

Grundfähigkeit 2 (**Anwenden**): Die Schüler sollen den Differenzenquotienten in möglichst vielen Anwendungssituationen deuten können.

Grundfähigkeit 3 (**Grundwissen**) : Die Schüler sollen die Leibniz'sche Schreibweise für den Differenzenquotienten kennen und anwenden können:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Grundfähigkeit 4 (**Grundwissen**): Die Schüler sollen insbesondere die mittlere Geschwindigkeit als mittlere Änderungsrate einer Zeit-Ort-Funktion interpretieren können.

4. Einige Musteraufgaben zum Differenzenquotienten (zur mittleren Änderungsrate)

1 [GV 1, GF 1] Berechne die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall :

a) $f: x \to 3x^2$, [1;5]   b) $f: x \to 2x-1$, [-2;4]   c) $f: x \to \frac{2}{x}$, [-5;-2]

2 [GV 1, GF 1] Gib die mittlere Änderungsrate der nachstehenden Funktion im angegebenen Intervall an:

a) $x \to f(x)$, $[a,a+h]$ c) $t \to N(t)$, $[t_0,t_0+t]$ e) $r \to A(r)$, $[r_1, r_2]$

b) $y \to T(y)$, $[c-h,c]$ d) $z \to y(z)$, $[-z_0,z_0]$ f) $z \to F(z)$, $[z, z']$

3 [GV 1, GF 1] Gib den Differenzenquotienten der Funktion f im angegebenen Intervall an:

a) $f(x) = x^2$, $[a,a+h]$ b) $f(t) = \frac{1}{t}$, $[t_0,t_0]$ c) $f(y) = \frac{y}{y+1}$, $[y_1,y_2]$

4 [GV 1, GF 1] Gib drei verschiedene Funktionen an, deren Differenzenquotient im Intervall [0;1] genau 1 beträgt! Skizziere die Graphen dieser Funktionen!

5 [GV 1, GF 1] Gib zwei verschiedene Funktionen an, die beide im Intervall [0;2] die mittlere Änderungsrate a) 2 , b) –1 , c) 0 haben ! Skizziere die Graphen dieser Funktionen!

6 [GV 4] Gib eine Termdarstellung einer Funktion f und ein Intervall [a,b] an, sodaß
a) f in [a,b] einen positiven Differenzenquotienten hat, aber in [a,b] nicht monoton steigend ist,
b) f in [a,b] einen negativen Differenzenquotienten hat, aber in [a,b] nicht monoton fallend ist!

7 [GV 1, GV 4] Zeichne die Graphen zweier verschiedener Funktionen im Intervall [1;8] , die beide
a) in [1;4] insgesamt steigen, in [4;6] insgesamt fallen und in [6;8] wieder insgesamt steigen, aber in keinem dieser Intervalle monoton steigend oder fallend sind,
b) in [1;3] die mittlere Änderungsrate –1, in [3;5] die mittlere Änderungsrate 2 und in [5;8] die mittlere Änderungsrate 0 haben!

8 [GV 1] Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2$ .In welchem Verhältnis steht die Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente im Intervall a) [1;4], b) [0;10], c) [50;100] ?

9 [GV 1] Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist gegeben durch $V(r) = \pi \cdot r^3$. In welchem Verhältnis steht die Volumszunahme zur Radiuszunahme, wenn ein Luftballon vom Radius 10 cm auf den Radius 15 cm aufgeblasen wird?

10 [GV 2] Es sei s die Kantenlänge eines Würfels, V(s) das Volumen und O(s) der Oberflächeninhalt des Würfels. Die Kantenlänge s wird von 1cm auf 10cm vergrößert. Um wie viel nimmt dabei a) das Volumen, b) der Oberflächeninhalt im Mittel pro cm zu?

11 [GV 3] Gegeben ist die folgende monoton wachsende Funktion f . Wieviel mal stärker wächst f(x) als x , wenn x von x_1 auf x_2 wächst?

a) $f(x) = x$, $x_1=1$, $x_2=4$ c) $f(x) = x^2$, $x_1=0$, $x_2=10$

b) $f(x) = 2x$, $x_1=1$, $x_2=4$ d) $f(x) = 2^x$, $x_1=0$, $x_2=10$

12 [GV 1,2,3] Gegeben sei eine Funktion f. Beschreibe die folgende Gleichung bzw. Ungleichung auf möglichst viele Arten:

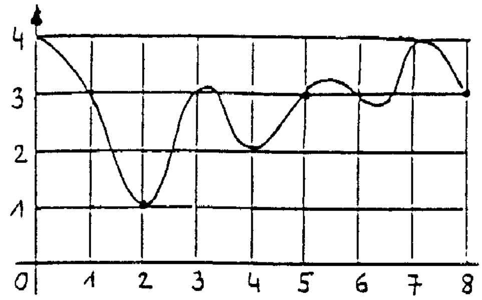
a) $\frac{f(20)-f(10)}{10} = 14$ b) $\frac{f(x+a)-f(x)}{a} = b$ c) $\frac{f(a+1)-f(a-1)}{2} > 0$ d) $\frac{f(u)-f(0)}{u} = 0$

13 [GV 1,4,6] Gegeben ist die nebenstehend abgebildete Funktion f.

a) In welchen der Intervalle [0;2], [2;5] und [5;8] ist der Differenzenquotient positiv, in welchen negativ, in welchen gleich 0 ? Beantworte diese Frage, ohne zu rechnen!

b) Berechne die Differenzenquotienten von f in diesen Intervallen!

c) Zeichne die Sekantenfunktionen in diesen Intervallen ein und gib die Steigungen dieser Funktionen an !



14 [GF 4] Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Ort-Funktion s durch $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. (Dabei wird vorausgesetzt, daß der freie Fall zum Zeitpunkt 0 beginnt und $s(0) = 0$ ist.) Wird t in Sekunden und s(t) in Metern gemessen, dann ist $g \approx 9{,}81\ m/s^2 \approx 10\ m/s^2$. Wir betrachten daher die Zeit-Ort-Funktion s mit $s(t) = 5 \cdot t^2$. Berechne die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall:

a) [0;1] b) [1;2] c) [2;3] d) [1;10]

15 [GV 1,2,3, GF 3] Berechne $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ im angegebenen Intervall und deute das Ergebnis!

a) $f: x \to x^2$, [2;4] b) $f: x \to x^3$, [1;5] c) $f: x \to x$, [4;7] d) $f: x \to \frac{1}{x}$, [3;5]

16 [GV 1,2,3, GF 3] Gegeben sei die Funktion $f: x \to 2x^2$. Wenn x um Δx wächst, so wachse f(x) um Δy.

a) In welchem Verhältnis steht Δy zu Δx , wenn $\Delta x = 100$?

b) Wie groß ist Δy im Mittel für $\Delta x = 1$?

c) Wievielmal größer ist Δy als Δx, wenn $\Delta x = 10$?

17 [GV 1,2] Wird ein Stein ins Wasser geworfen, so breitet sich vom Aufprallpunkt eine kreisförmige Welle aus.

a) Stelle eine Formel auf, mit der man berechnen kann, um wie viel der Kreisflächeninhalt wächst, wenn der Radius von r Meter auf r+1 Meter wächst! Berechne mit Hilfe dieser Formel, um wie viel der Flächeninhalt des Kreises wächst, wenn der Radius von 1 auf 2 Meter, von 2 auf 3 Meter, ..., von 9 auf 10 Meter wächst! Berechne das arithmetische Mittel dieser Zunahmen!

b) Um wie viel wächst der Flächeninhalt des Kreises im Mittel pro Meter Radius, wenn der Radius von 1 auf 10 Meter wächst? Vergleiche dieses Ergebnis mit dem unter a) berechneten arithmetischen Mittel! Warum ergibt sich annähernd derselbe Wert?

18 [GV 1] Der Graph der Funktion $f: x \to x^2$ wird mit steigenden Argumenten in R^+ immer „steiler".

a) Überprüfe dies durch Berechnung der Differenzenquotienten in den Intervallen [0;1], [10;11] und [100;101]!

b) Zeige allgemein: Sind [a,b] und [c,d] zwei Intervalle mit a < c und b < d, dann ist der Differenzenquotient von f in [a,b] kleiner als der in [c,d].

19 [GV 1] Es sei f eine auf [a,b] definierte reelle Funktion. Wann heißt f streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend in [a,b]? Beweise mit Hilfe dieser Definition:

a) Ist *für alle* $x_1, x_2 \in$ [a,b] der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, dann ist f streng monoton steigend in [a,b].

b) Ist *für alle* $x_1, x_2 \in$ [a,b] der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, dann ist f streng monoton fallend in [a,b].

20 [GF 2] Gib möglichst viele Deutungen der mittleren Änderungsrate $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ in Anwendungssituationen an!

Mögliche Lösung :

f(x)	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
s(t) = Ort zum Zeitpunkt t	$\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$ = mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [a,b]
V(t) = Volumen zum Zeitpunkt t beim Füllen eines Gefäßes	$\frac{V(b)-V(a)}{b-a}$ = mittlere Volumszunahmegeschwindigkeit im Zeitintervall [a,b]
p(h) = Luftdruck in der Höhe h	$\frac{p(b)-p(a)}{b-a}$ = mittlere Änderungsrate des Luftdrucks bezüglich der Höhe im Höhenintervall [a,b]
V(p) = Volumen beim Druck p in einem Kolben	$\frac{V(b)-V(a)}{b-a}$ = mittlere Änderungsrate des Volumens bezüglich des Druckes in einem Kolben im Druckintervall [a,b]
....	....

5. Grundvorstellungen zum Differentialquotienten (zur Änderungsrate)

Grundvorstellung 1: Der Differentialquotient (die Änderungsrate) ist der Grenzwert des Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate).

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Kontrollfrage: Was versteht man unter dem Differentialquotienten f'(x) ?

Grundvorstellung 2: Der Differentialquotient (die Änderungsrate) f'(x) ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate) von f in einem sehr kleinen Intervall um x . Das bedeutet:

- Der Differentialquotient (die Änderungsrate) f'(x) ist ungefähr gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in der Nähe von x.
- Der Differentialquotient (die Änderungsrate) f'(x) ist ungefähr gleich der mittleren Änderung von f pro Argumenteinheit in der Nähe von x. [Nur sinnvoll, wenn die Argumenteinheit klein im Vergleich zur betrachteten Umgebung von x ist.]
- Der Differentialquotient (die Änderungsrate) ist ungefähr gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muß, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten, sofern man in der Nähe von x bleibt.

Kontrollfrage: $f(x) = x^2$. Berechne f'(3) ! Deute das Ergebnis auf möglichst viele Arten!

Grundvorstellung 3: Der Differentialquotient (die Änderungsrate) einer linearen Funktion ist an jeder Stelle gleich der Steigung der linearen Funktion. [Die Schüler sollen dies auch begründen können.]

Kontrollfrage: Gegeben sei die lineare Funktion f: $x \rightarrow kx+d$. Wie groß ist $f'(x)$?

Grundvorstellung 4: Der Differentialquotient (die Änderungsrate) $f'(x)$ ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x,f(x))$.

Kontrollfrage: $f(x) = x^2$.
a) Wie groß ist die Steigung von f an der Stelle 5 ?
b) In welchen Punkten hat die Tangente an den Graphen von f die Steigung 10 ?

6. Grundfähigkeiten zum Differentialquotienten (zur Änderungsrate)

Grundfähigkeit 1: Die Schüler sollen für einfache Funktionen den Differenzenquotienten (die Änderungsrate) $f'(x)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate) ermitteln können.

Grundfähigkeit 2 (Anwenden): Die Schüler sollen den Differentialquotienten (die Änderungsrate) in möglichst vielen Anwendungssituationen deuten können.

Grundfähigkeit 3 (Grundwissen): Die Schüler sollen insbesondere wissen, daß die Begriffe „Mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall" und „Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt" zwei verschiedene Begriffe sind und sollen erläutern können, wie diese beiden Begriffe miteinander zusammenhängen.

Grundfähigkeit 4 (Grundwissen): Die Schüler sollen die Leibniz'sche Schreibweise für den Differentialquotienten (die mittlere Änderungsrate) kennen und anwenden können :

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Grundfähigkeit 5: Die Schüler sollen in der Lage sein, verschiedene Begriffe (insbesondere physikalische Begriffe) als Änderungsraten zu definieren.

Grundfähigkeit 6: Die Schüler sollen in der Lage sein, Steigungen vorgegebener Funktionsgraphen als Änderungsraten in Anwendungssituationen zu interpretieren.

7. Einige Musteraufgaben zum Differentialquotienten (zur Änderungsrate)

1 [GF 3] Die Schockwelle einer atomaren Explosion breite sich annähernd nach der Gleichung

$$s(t) = 1{,}6\,t^2 + 3{,}2\,t \qquad (0 \le t \le 10)$$

aus, wobei s(t) die Entfernung (in km) vom Explosionszentrum nach t Sekunden ist.

a) Berechne die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit im Zeitintervall [0;10] sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten 2, 4, 6, 8 und 10!

b) Wie lange braucht die Schockwelle bis zu einem 63 km vom Zentrum entfernten Ort und welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat sie dort?

2 [GV 1, GF 5] Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) eines Autos, dessen Geschwindigkeit gleichmäßig zunimmt, sei gegeben durch $E(t) = 5000 \cdot t^2$, wobei t in Sekunden und E(t) in Joule gemessen wird.

a) Berechne die Zunahme der kinetischen Energie in den Zeitintervallen [0;10] und [1,5;2]!

b) Definiere den Begriff „Mittlere Energiezunahmegeschwindigkeit im Zeitintervall [t,z] bzw. [z,t]"!

c) Gib eine Formel für die mittlere Energiezunahmegeschwindigkeit im Zeitintervall [t,z] bzw. [z,t] an! Berechne mit dieser Formel die mittlere Energiezunahmegeschwindigkeit in den unter a) genannten Intervallen! In welchem dieser Intervalle nimmt die Energie im Mittel am schnellsten zu?

d) Es sei E'(t) die „Energiezunahmegeschwindigkeit zum Zeitpunkt t". Definiere diesen Begriff!

e) Gib eine Formel für E'(t) an und berechne mit dieser Formel, wie schnell die kinetische Energie zum Zeitpunkt 1, 2, 10 bzw. 15 zunimmt!

3 [GV 1, GF 5] Ein kugelförmiger Ballon wird aufgeblasen. Sein Oberflächeninhalt beim Radius r ist gegeben durch $O(r) = 4\pi r^2$. Dabei wird r in cm und O(r) in cm^2 gemessen.

a) Ist die Zunahme des Oberflächeninhalts größer, wenn der Radius von 5cm auf 6cm oder wenn er von 60cm auf 60,1 cm wächst? Schätze zuerst und rechne dann!

b) Was versteht man unter der mittleren Zunahme des Oberflächeninhalts bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z] bzw. [z,r]?

c) Gib eine Formel für die mittlere Zunahme des Oberflächeninhalts bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z] bzw. [z,r] an! Berechne mit dieser Formel die mittlere Zunahme des Oberflächeninhalts bezüglich des Radius in den beiden unter a) angeführten Fällen!

d) Es sei O'(r) die „Zunahme des Oberflächeninhalts bezüglich des Radius beim Radius r". Definiere diesen Begriff!

e) Gib eine Formel für O'(r) an und berechne mit dieser Formel, wie schnell der Oberflächeninhalt beim Radius 5 bzw. 60 wächst!

4 [GV 1] Die Seitenlänge eines Quadrats wird von 5 cm auf 10 cm bzw. von 40 cm auf 41 cm vergrößert.

a) Schätze zuerst, in welchem Fall die Änderung des Flächeninhalts größer ist, und rechne nach!

b) Berechne die mittlere Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich der Seitenlänge in den Intervallen [5;10] und [40;41]!

c) Stelle eine Formel für den Differentialquotienten der Funktion $A: s \rightarrow A(s) = s^2$ auf und berechne A'(5) und A'(40)!

5 [GV 1] Wie Aufgabe 4, nur mit dem Umfang U(s) = 4 s anstelle des Flächeninhalts A(s).

6 [GV 1] Stelle eine Formel für den Differentialquotienten f'(x) auf und berechne f'(1) :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

7 [GV 1] Wenn ein Stein ins Wasser geworfen wird, geht vom Aufprallpunkt eine kreisförmige Welle aus. Die Wellenfront ist daher ein Kreis mit wachsendem Radius r. Wir betrachten die Funktion $A: r \rightarrow A(r)$, die jedem Radius r den Flächeninhalt A(r)des Kreises zuordnet.

a) Berechne die mittlere Änderungsrate des Kreisflächeninhalts A im Radiusintervall [5;10]!

b) Stelle eine Formel für die Änderungsrate des Kreisflächeninhalts bezüglich des Radius auf und berechne diese Änderungsrate beim Radius 5 bzw. 10 (m)!

8 [GV 1] Wie Aufgabe 7, nur mit dem Umfang U(r) anstelle des Kreisflächeninhalts A(r).

9 [GV 1] Ein Gas wird in einem Behälter auf konstanter Temperatur gehalten und komprimiert. Dabei entspreche jedem Volumen V der Druck $p(V) = \frac{100}{V}$, wobei V in m^3 und p(V) in Hektopascal gemessen wird.

a) Wie groß ist die mittlere Druckänderung im Volumsintervall [0,10;0,15]?
b) Wie groß ist die Änderungsrate des Druckes bezüglich des Volumens beim Volumen 0,10 bzw. 0,15?

10 [GV 1,2] Skizziere den Graphen der Funktion $f: x \to x^2$!

a) Berechne den Differentialquotienten von f an der Stelle 2!
b) Berechne den Differenzenquotienten von f im Intervall [1,9;2,1] bzw. [1,99;2,01]! Wie groß ist jeweils der Unterschied zu f'(2)?

11 [GV 1,2] Gegeben ist die Funktion $f: x \to x^2+1$.

a) Berechne f'(-3)!
b) Was sagt das Ergebnis von a) über das Verhalten von f im Intervall [-3,01;-2,99] aus?

12 [GV 4]

a) Berechne die Steigung der Funktion $f: x \to 4 - \frac{1}{2} \cdot x^2$ an den Stellen –2 und 1 und überprüfe die Ergebnisse anhand einer Zeichnung!
b) Ermittle anhand des Graphen der Funktion f die Steigung an den Stellen –1 und 3 und überprüfe die Ergebnisse durch Rechnung!

13 [GV 4] Zeichne den Graphen der Funktion a) $f: x \to x^2$, b) $f: x \to \frac{1}{x}$, c) $f: x \to x^3$!

Berechne die Steigung von f an den Stellen 2 und –1 und überprüfe das Ergebnis an einer Zeichnung!

14 [GV 4] Zeichne die Funktion f für $-3 \leq x \leq 3$!

a) $f: x \to x^2-1$ b) $f: x \to x - x^2$ c) $f: x \to x + \frac{1}{x}$

Berechne die Steigung der Funktion an den Stellen –3, -1, 1, 3 und verwende diese Werte, um die Tangenten in den entsprechenden Punkten zu zeichnen!

15 [GV 4] Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{1}{2} \cdot x^2$. Berechne jene Stellen, an denen die Steigung der Funktion f den Wert a) 3, b) -1, c) 0, d) -4 hat! Überprüfe das Ergebnis anhand einer Zeichnung !

16 [GF 4] Für den Luftdruck p(h) in der Höhe h über dem Meeresniveau gilt:

a) $\frac{\Delta p(h)}{\Delta h} \approx -k \cdot p(h)$ b) $\frac{dp(h)}{dh} \approx -k \cdot p(h)$ ($k \in \mathbb{R}^+$ konstant)

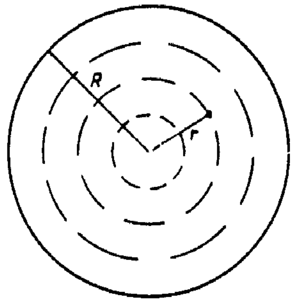
Formuliere diese Beziehung in Worten!

17 [GF 4] Beim radioaktiven Zerfall zerfallen die Teilchen eines radioaktiven Stoffes (d.h. sie wandeln sich in Teilchen anderer Stoffe um). Ist N(t) die Anzahl der (noch unzerfallenen) Teilchen zum Zeitpunkt t, so gilt:

a) $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda \cdot N(t)$ b) $\frac{dN(t)}{dt} \approx -\lambda \cdot N(t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$ konstant)

Formuliere diese Beziehung in Worten!

18 [GV 1,GF 2] Die Geschwindigkeit des Blutes in einem Blutgefäß ist nicht an allen Stellen gleich groß. In der Mitte ist sie am größten, an den Wänden nahezu 0. Theorie und Messungen zeigen, daß die Blutgeschwindigkeit im Abstand r von der Mitte ungefähr $v = C\,(R^2-r^2)$ beträgt, wobei R der durchschnittliche Radius des Blutgefäßes und C eine positive Konstante ist.



a) Berechne die Änderungsrate der Blutgeschwindigkeit bezüglich des Abstandes r! Was bedeutet es, daß diese Änderungsrate negativ ist?

b) Wenn jemand Alkohol zu sich nimmt, erweitern sich die Blutgefäße. Nimmt dadurch die Blutgeschwindigkeit in einem bestimmten Abstand r ab oder zu? Hat dies einen Einfluß auf die in a) berechnete Änderungsrate?

19 [GV 4] Gegeben sei der Graph der Zeit-Ort-Funktion s: $t \rightarrow t^2$. Zeige, daß die Gerade durch die Punkte (a,a^2) und (b,b^2) parallel ist zur Tangente an der Stelle $\frac{a+b}{2}$! Wie kann dieses Ergebnis mit Hilfe von Geschwindigkeiten formuliert werden?

20 [GV 4] Gegeben sei der Graph der Funktion $f: x \rightarrow x^3$. Zeige, daß die Gerade durch die Punkte (a,a^3) und (b,b^3) parallel ist zur Tangente an den Graphen an der Stelle $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$!

21 [GV 4] Zeige für f: $x \rightarrow x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, daß die Tangente an den Graphen im Ursprung mit der 1.Achse übereinstimmt, wenn n>1 ist! Was gilt für n=1?

22 [GF 4] Zeige, daß die durch die folgende Formel gegebene Funktion die angegebene Gleichung erfüllt:

a) $y = C\cdot x^2$; $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ b) $r = C\cdot\varphi+\varphi^2$; $\frac{dr}{d\varphi}-\frac{r}{\varphi}=\varphi$ c) $z=\frac{c}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2c}$; $x\cdot\frac{dz}{dx}-2z=\frac{1}{c}$

Literatur

GÖTZ, S./REICHEL, H.-CH. (1998): TIMSS. Informationen, Beispiele, Folgerungen. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

HEYMANN, H.W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz , Weinheim - Basel.

KLAUSBERGER, S. (1993): Didaktische Probleme der Differentialrechnung. Diplomarbeit, Univ. Wien.

UNGER, J. (1999): Eine Untersuchung und ein Lehrgang zur Integralrechnung in der Schule. Diplomarbeit, Univ. Wien.

VOM HOFE, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum, Heidelberg-Berlin-Oxford.

VOM HOFE, R. [Hrsg.]: Grundvorstellungen. Mathematik lehren, Heft 78 (Oktober 1996).